Apéndice II

Tratamiento de datos experimentales. Teoría de errores

(Fuente: "Prácticas de Laboratorio: Física", Hernández et al., 2005)

El objetivo de la experimentación en cualquier rama de la Ciencia es el estudio cuantitativo de determinadas propiedades de la naturaleza. Este estudio se lleva a cabo midiendo la **magnitud física** que caracteriza las propiedades que interesan al experimentador, y tratando posteriormente los datos obtenidos.

En ciencia e ingeniería, el concepto de *error* tiene un significado diferente del uso habitual de este término. Coloquialmente, es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a "equivocación" o "fallo". En ciencia el error está asociado al concepto de ***incertidumbre*** inevitable en la determinación del resultado de una medición, ya que el propio hecho de la medición va acompañado de la acción e interacción de numerosos factores influyentes en el resultado de la misma. Más precisamente, lo que procuramos en toda medición es conocer las cotas (o límites probabilísticos) de estas incertidumbres. Es decir, buscamos establecer un intervalo $[x - \Delta x, x + \Delta x]$ donde, con cierta probabilidad, podamos decir que se encuentra el *mejor valor* de la magnitud x. Este mejor valor x es el más representativo de nuestra medición y al semiancho Δx lo denominamos la incertidumbre de la medición.

Consecuentemente, el resultado de una medida sólo tiene sentido si, además del número obtenido y su unidad correspondiente, va acompañado de otro número, denominado error, que dé cuenta de la incertidumbre asociada a ella. Las definiciones de magnitud, medida y unidades están íntimamente relacionadas entre sí:

Magnitud: Propiedad física que puede ser medida o inferida a partir de otras medidas (como tiempo, longitud, velocidad, presión, etc.).
Medir: Comparación de una cantidad de cierta magnitud con otra cantidad fija de la misma, denominada unidad.

Por supuesto, lo ideal es conseguir hacer el error lo más pequeño posible, pero éste siempre existirá. Para poder obtener conclusiones válidas a partir de las medidas, **el error debe aparecer siempre claramente indicado** y debe ser manejado adecuadamente.

1. Conceptos de exactitud, precisión y sensibilidad

Cada vez que se lleva a cabo un experimento o se mide una cantidad con el instrumento adecuado, surgen dos cuestiones: ¿Cómo de

fiable es el resultado? ¿Cómo de cerca está del valor real, cualquiera que sea éste? La respuesta a estas cuestiones nos lleva a los conceptos de **precisión**, **sensibilidad** y **exactitud**, que han sido definidos de diferente forma por distintos autores, lo que origina que actualmente exista cierta discrepancia en su interpretación. Nosotros procuraremos dar las definiciones más aceptadas. Para ello debemos distinguir si se ha realizado una sola medida o varias medidas de la magnitud. En el caso de una sola medida la **sensibilidad** está asociada al **error absoluto** de dicha medida y la **precisión** al **error relativo**, conceptos que trataremos más adelante.

En el caso de disponer de más de una medida (situación recomendable siempre) introducimos estos tres conceptos de la siguiente forma: La cuestión sobre la fiabilidad del resultado está relacionada con la **precisión** o reproducibilidad del experimento. El concepto de **precisión** hace referencia a la concordancia entre una medida y otras de la misma magnitud, realizadas en condiciones sensiblemente iguales. Por tanto un dispositivo será más preciso cuanto menor sea la diferencia entre distintas medidas de una misma magnitud en condiciones idénticas.

La cuestión sobre la cercanía del resultado al valor real está relacionada con la **exactitud** o proximidad al valor verdadero (si fuese conocido). Se define **exactitud** como el grado de concordancia entre el valor verdadero y el experimental. Por tanto un aparato será tanto más exacto cuanto más próximos sean los resultados de las medidas al valor "verdadero" de la magnitud.

Otro concepto necesario para caracterizar a los aparatos de medidas es el de **sensibilidad**. La **sensibilidad** de un aparato está relacionada con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Normalmente se suele admitir que la sensibilidad de un aparato viene indicada por el valor de la división más pequeña de la escala de medida.

2. Clasificación de errores

Las palabras precisión y exactitud tienen significados completamente distintos en la teoría de errores, mientras que se usan de manera indistinta en el lenguaje cotidiano. La distinción se aprecia claramente si atendemos a los posibles tipos o fuentes de errores. Éstos se clasifican en dos grandes grupos: errores sistemáticos y errores accidentales.

a) **Errores sistemáticos.** Son errores que tienen lugar siempre en el mismo sentido y que se repiten constantemente en el transcurso de un experimento. Pueden ser causados por errores de calibración (o errores de cero) de los aparatos de medida, condiciones experimentales no apropiadas (presión, temperatura, etc.) que afectan a los instrumentos de medida, tendencias erróneas en el observador, técnicas de medida inadecuadas, uso de fórmulas o modelos aproximados, etc. Un minucioso análisis del instrumento y del procedimiento de medida permite eliminar en lo posible la presencia de estos errores. Por lo tanto, los errores sistemáticos

afectan a la **exactitud** de la medida, es decir, a la proximidad al valor verdadero, ya que hacen que todos los resultados sean erróneos en el mismo sentido (demasiado altos o demasiado bajos).

b) Errores accidentales o aleatorios. Son debidos a diversas causas difíciles o imposibles de controlar y alteran las medidas realizadas en diferente cuantía y sentido cada vez. Pueden ser causados por fluctuaciones en las condiciones ambientales durante el experimento, errores de apreciación debidos a las limitaciones de nuestros sentidos, errores de precisión impuestos por la sensibilidad del aparato de medida, etc. Todo esto da lugar a que la repetición reiterada de la medición realizada por un mismo observador no siempre lleve al mismo resultado. El error debido a la superposición de todos estos efectos sólo puede ser detectado si el instrumento de medida es suficientemente sensible. Su valor no puede ser estimado a partir de una medida aislada, siendo necesaria la realización de una serie de medidas que permita, mediante un tratamiento estadístico de los datos, determinar una cota máxima de error. Los errores accidentales afectan a la **precisión** o **reproducibilidad** de un experimento. Por ejemplo, la obtención de varias medidas de la misma magnitud, diferentes entre sí, nos permitirán determinar el valor de dicha magnitud de forma menos precisa que si los valores obtenidos hubiesen sido más parecidos entre sí.

Ambos tipos de errores pueden darse simultáneamente y/o de forma independiente, de forma que se pueden tener resultados precisos aunque poco exactos, etc., dependiendo de los tipos de errores implicados.

3. Error absoluto. Error relativo

Dado que, como hemos visto, no es posible conocer el valor exacto de ninguna magnitud, en toda medida resulta necesario dar alguna indicación del error cometido que dé cuenta de cuánto puede alejarse el resultado obtenido del valor exacto. Por lo tanto, en cualquier medida se debe indicar el error que puede haberse cometido.

El error puede expresarse de dos formas diferentes que no deben ser confundidas:

Error absoluto: Es el valor absoluto de la diferencia entre el valor obtenido experimentalmente y el verdadero valor de ésta. En principio, como el valor exacto no suele ser conocido, no se podría conocer el error absoluto. Ahora bien, la teoría de errores nos permite al menos estimar, como veremos posteriormente, la incertidumbre asociada a la medida de una magnitud dada, que va a ser lo que consideraremos como error absoluto. El error absoluto tiene las mismas dimensiones físicas y, por tanto, las mismas unidades, que la medida a la que acompaña, y se suele representar como Δx, de forma que el resultado de la medida x de una magnitud X debe expresarse como $X = x \pm \Delta x$ con sus unidades correspondientes (por ejemplo, 12,6 ± 0,4 cm).

Error relativo: Es el cociente entre el error absoluto y el verdadero valor de la misma y, en consecuencia, no tiene dimensiones. Aunque tampoco

es conocido, una estimación del mismo viene dada por: $\varepsilon_r = \Delta x / x$ (en tantos por uno, donde *x* es el resultado de la medida). Suele darse en tantos por ciento ($\varepsilon_r \times 100$). (En el ejemplo anterior, el error relativo sería del 3,2%). En general, una medida con un error relativo de más del 10 % es más bien pobre, mientras que si el error es del 1 % o menor, la medida puede considerarse buena, aunque este criterio cambia según el campo de aplicación.

Como hemos dicho, los errores absoluto y relativo nos hablan de la sensibilidad y precisión respectivamente, cuando tenemos una sola medida. Los siguientes ejemplos nos aclaran estos conceptos:

> **Ejemplo:**
> Supongamos que disponemos de una sola medida de la edad de dos personas: un niño de 22 meses y un hombre de 48 años. La sensibilidad de cada una de estas medidas coincidiría con el error absoluto de ambas: 1 mes y un año respectivamente. Sin embargo la precisión sería en el primer caso, 1/12 (8,33%) y en el segundo 1/48 (2,08%). En este ejemplo la segunda medida es aproximadamente 4 veces más precisa.

4. Presentación de resultados. Convenio en el redondeo.

El valor experimental de una magnitud *A* debe expresarse con un número de cifras que viene determinado por el valor del error absoluto, ya que sería absurdo presentar una medida hasta la diezmilésima cuando el error estuviese en las décimas. Ese número de cifras es lo que se llama **número de cifras significativas**. El número de cifras significativas es el número de cifras que hay desde la primera cifra distinta de 0 empezando por la izquierda hasta la primera cifra que venga afectada por el error absoluto, cuando éste es conocido.

Un resultado no estará correctamente expresado si no se aplican adecuadamente las **técnicas de redondeo**. Partiendo de la magnitud y de su error absoluto con todas sus cifras, el procedimiento de redondeo se resume en los siguientes pasos:

1) Se examinan las dos primeras cifras significativas del error absoluto (esto es, descontando los ceros a la derecha e izquierda del número). Si estas dos cifras forman un número menor o igual a 25, se conservan ambas[1]. Si es mayor, se conserva una sola cifra. En ambos casos, la última cifra conservada se redondea aumentándola en 1 unidad si la siguiente cifra (la primera cifra descartada) es mayor que 5.
2) A continuación, se expresa la magnitud de forma que su última cifra sea del mismo orden que la del error, descartando las demás y redondeándola de la misma forma que el error absoluto, o sea, aumentándola en 1 unidad si la siguiente cifra (la primera descartada) es mayor o igual que 5, y no alterándola si es menor que 5.

[1] En el caso de que, por ejemplo, sea 0,25, sólo se conservarán las dos si la siguiente cifra es menor que 5. Si no, pasaría a ser 0,26, que se redondea a 0,3.

Una vez redondeados los resultados, se presenta el resultado final de la siguiente manera:

A* = (valor de *A* ± error absoluto de *A*) *Unidades

En ocasiones hay que tener en cuenta que algunos ceros no se pueden suprimir, ya que están indicando cuál es el orden de magnitud correcto o simplemente que la cifra indicada es efectivamente 0 y no cualquier otra (por ejemplo, escribir (2±0,4) cm es incorrecto, ya que lo correcto sería (2,0±0,4) cm, puesto que ese 0 decimal, en el valor de la magnitud, es una cifra significativa).

Para números muy grandes o muy pequeños conviene usar la notación científica, esto es, en potencias de 10, respetando el número significativo de cifras, expresando el valor y su error relativo con la misma potencia de 10. Por ejemplo $2{,}34 \cdot 10^{9}$ ó $1{,}60 \cdot 10^{-19}$.

Cuando los cálculos se realizan mediante calculadora u ordenador, conviene conservar siempre todas las cifras que éstos permitan, procediéndose al **redondeo SÓLO en el resultado final, NUNCA redondeando resultados intermedios.**

Si en la fórmula o ley que permite el cálculo de una magnitud aparece alguna constante matemática o física (como π, g, c, N_A, etc.), conviene considerar, en el momento de operar, el máximo número significativo de cifras (por ejemplo las 8 cifras significativas que suelen aparecer en las calculadoras científicas), de forma que el error considerado sea despreciable frente a los de las magnitudes que intervienen en la fórmula.

5. Tipos de medidas

Las medidas que se realizan en un laboratorio pueden ser de dos tipos:

Medidas directas: El valor de la magnitud que se quiere conocer se mide directamente con el instrumento de medida (esto es, mediante la comparación con un patrón adecuado o la utilización de un aparato calibrado). Ejemplos de medidas directas son: la medida de una longitud con un calibre, el tiempo con un cronómetro, el voltaje con un voltímetro, etc.

Medidas indirectas: El valor de la magnitud deseada se obtiene como resultado del cálculo realizado a partir de otras magnitudes relacionadas con la magnitud a determinar y de ciertas constantes. Por ejemplo, la determinación (medida indirecta) del volumen *V* de un cilindro a partir de la medida (directa) de su diámetro *D* y de su altura *h* aplicando la expresión $V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 h$.

6. Determinación de errores.

En todo lo que sigue se va a suponer que **se han identificado todas las fuentes de error sistemático y que éstos han sido reducidos a un nivel despreciable, de forma que las únicas fuentes de error que quedan son las accidentales**. La estimación de los errores en las medidas es diferente si se trata de medidas directas o de medidas indirectas.

6.1. Cálculo de errores en medidas directas

Casi todas las medidas directas implican la lectura de un valor de una escala o en una pantalla digital. Se pueden distinguir dos casos dependiendo de cómo sean los errores accidentales frente a la precisión del aparato, esto es, dependiendo de si al medir varias veces la misma magnitud con el aparato se obtiene exactamente el mismo resultado o no:

a) Cuando los errores accidentales son pequeños frente a la precisión del aparato (al medir varias veces el resultado es siempre el mismo o muy parecido)

En este caso, los errores accidentales son despreciables frente a la precisión del aparato. El margen de error es el que indique el fabricante en el manual de instrucciones. En nuestro caso, para las prácticas que se van a llevar a cabo en el laboratorio, resulta razonable aplicar el criterio siguiente para el límite de error (error absoluto) en sustitución de las especificaciones del fabricante:

- Si la medida se ha hecho con un aparato analógico, es decir, basado en una escala graduada, se toma como error absoluto la menor unidad que pueda medir el aparato (distancia entre dos divisiones). En cuanto al valor de la magnitud medida, éste vendría dado por el de la marca que está más cercana a la posición de la aguja.

- Si la medida se ha hecho con un aparato digital, tomaremos como error absoluto una unidad del último dígito de la lectura del aparato **(salvo indicación del fabricante)**. Por ejemplo, si un voltímetro digital da un valor de 29,7 mV, el error absoluto es ±0,1 mV.

b) Cuando los errores accidentales son superiores a la precisión del aparato (los resultados de la medida no son siempre los mismos)

El error del instrumento es despreciable frente a los errores accidentales y debe hacerse un tratamiento estadístico de los resultados. Por ello en este caso resulta necesario realizar varias medidas. El número de medidas que debemos realizar vendrá determinado por la dispersión de los valores individuales obtenidos en cada medición, según el siguiente procedimiento:

- Realizaremos siempre tres medidas de la magnitud, asignándoles como valor del error absoluto la sensibilidad del aparato de medida.
- Se halla la dispersión total de las mismas, *D*, es decir la diferencia entre los valores extremos de las medidas; si la dispersión no

supera el valor de la sensibilidad del aparato, *S*, tomaremos como "valor verdadero" de la magnitud el valor medio o media de las medidas,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1)$$

y le asignaremos el valor de la sensibilidad como error absoluto.

- En el caso de que *D* sea mayor que *S* deberemos calcular el tanto por cierto de la dispersión *T* respecto al valor medio de las medidas:

$$T_{\%} = \frac{D}{\bar{x}} \cdot 100 \qquad (2)$$

dependiendo del valor de dicho tanto por ciento, tendremos suficiente con estas tres medidas iniciales o, por el contrario, deberemos realizar un mayor número de las mismas, según el siguiente criterio:

$T \leq 2\%$	Bastan las 3 medidas iniciales realizadas
$2\% < T \leq 8\%$	Total de medidas necesarias: 6
$8\% < T \leq 15\%$	Total de medidas necesarias: 15
$15\% < T$	Total de medidas mínimo necesarias: 50

Tras haber realizado las medidas necesarias, se tomará como valor de la magnitud el valor medio de las mismas $\bar{x}$ y se le asignará un valor del error absoluto según el número de medidas:

- Si el número de medidas necesario es 3, se tomará como valor del error absoluto la sensibilidad del aparato *S*, es decir $\Delta x = S$
- Si dicho número es 6, se tomará como error absoluto el máximo entre la sensibilidad del aparato y la cuarta parte de la dispersión de las medidas:

$$\Delta x = \text{máx}\left(\frac{D_6}{4}, S\right) \qquad (3)$$

- En el caso de que hayan sido necesarias más de 6 medidas, el error absoluto se obtiene a partir del **error cuadrático medio** (también denominado **desviación típica** σ_{n-1} o **desviación estándar**[2]) del conjunto de las *N* medidas, es decir:

$$\Delta x = \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad (4)$$

- Si se han realizado más de 50 medidas, se construye el histograma representativo de las mismas, tomando en abscisas, a intervalos regulares, los valores de las medidas realizadas y representando cada una por un punto sobre la abscisa correspondiente. En este caso debemos seguir realizando medidas, hasta que la distribución resultante tenga forma de distribución gaussiana o normal. Sobre esta distribución se obtiene como estimación del valor "verdadero"

[2] En las calculadoras suele haber un botón σ_{n-1} que calcula la desviación estándar.

de la magnitud al valor medio de la misma y como medida del error el error cuadrático medio o desviación estándar. Se puede demostrar mediante razonamientos estadísticos, en los que no vamos a entrar, que si todas **las fuentes de error son pequeñas y aleatorias** y se realizase un número grande de medidas, sería de esperar que el 68,3 % de los resultados cayese dentro de $\bar{x} \pm \sigma_{n-1}$, esto es, la probabilidad de que nuestro resultado esté entre $\bar{x} - \sigma_{n-1}$ y $\bar{x} + \sigma_{n-1}$ es del 68,3 %. Esto es lo que se conoce como el límite de confianza del 68,3 %. Si en su lugar se escoge $\bar{x} \pm 2\sigma_{n-1}$, estaríamos usando un límite de confianza del 95,4 %, y si es $\bar{x} \pm 3\sigma_{n-1}$, sería del 99,7 %.

6.2. Cálculo de errores en medidas indirectas

Dado que la medida indirecta de una magnitud proviene del cálculo a partir de otras magnitudes medidas a su vez directa o indirectamente, mediante la aplicación de leyes físicas o fórmulas matemáticas en general, es importante saber cómo se propagan los errores desde las directas a las indirectas. De ello se encarga la teoría de propagación de errores que presentaremos a continuación, fundamentada en el cálculo diferencial.

En algunas ocasiones, una magnitud es medida indirectamente a partir de otra única magnitud (función de una sola variable, *f(x)*), pero, en general, es medida a partir de varias magnitudes (función de varias variables, *f(x,y,...)*), cada una de las cuales tiene su propio margen de error (Δx, Δy, ...). Por otro lado, en unos casos los errores de las magnitudes que intervienen son independientes (no están relacionados entre sí) y son totalmente aleatorios, aunque en otros puede no estar tan clara la independencia de los errores ni su aleatoriedad. Habrá que tener en cuenta todos estos factores a la hora de propagar los errores.

Supongamos que la magnitud que se quiere determinar indirectamente *A* sea resultado de la aplicación de una fórmula *A* = f(x, y, ...) en la que aparecen varias magnitudes *x, y,* ... que han sido medidas con errores absolutos Δx, Δy, ... El valor experimental de *A* será el que resulte de evaluar esa función para los valores experimentales de las demás magnitudes x, y, ... Se puede demostrar que una estimación del error absoluto de *A* viene dada por:

$$\Delta A = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\Delta y + \ldots \qquad (5)$$

donde $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \ldots$ son las derivadas parciales de *f* respecto de *x*, y, etc., estando evaluadas todas las derivadas parciales en los valores experimentales de x, y, etc. Esta es la **fórmula general de la propagación de errores en fórmulas matemáticas** que usaremos en las prácticas de laboratorio.

Particularmente interesante es lo que ocurre cuando, por ejemplo, A es suma o resta de dos o más variables $A = x + y + \ldots$ En este caso el

error de A se obtiene como suma de los errores individuales de cada una de las variables de que depende $\Delta A = \Delta x + \Delta y + ...$ sin más que aplicar la ecuación 5. En otro caso particular, en un producto, se obtiene que el error relativo es la suma de los errores relativos de cada uno de los factores.

7. Construcción de gráficas

A la hora de realizar representaciones gráficas se deben respetar las siguientes normas:

a) El eje de abscisas y el eje de ordenadas

Un convenio bien establecido para todas las prácticas es representar en el eje de abscisas (horizontal) la variable independiente (aquella que elige el experimentador en cada medida), y en el eje de ordenadas (vertical) la variable dependiente (aquella cuyo valor se determina); brevemente. Lo que hacemos es tratar de representar efecto (en el eje vertical) frente a causa (en el eje horizontal).

b) El papel

Los papeles más utilizados en las gráficas de Física son el lineal (normalmente graduado en milímetros y por eso comúnmente llamado *papel milimetrado*), y el logarítmico, que puede ser semilogarítmico (de rayado logarítmico en un solo eje y lineal en el otro) y logarítmico sobre ambos ejes.

c) Identificación de cada eje

Los ejes deben rotularse siempre con el nombre y símbolo de la magnitud representada junto a las unidades en que se expresa.

También debe indicarse, en su caso, la potencia de 10 correspondiente, por la que va multiplicada la unidad. De este modo, las divisiones en un eje pueden enumerarse 1, 2, 3,... en lugar de 10.000, 20.000, 30.000,... ó de 0,001, 0,002, 0,003,... etc., si en el eje se indica $\times 10^4$ ó $\times 10^{-3}$, respectivamente. En los ejes se marcarán los valores de las variables representadas, a intervalos regulares, de acuerdo con la escala escogida.

d) Escalas

La selección de la escala utilizada en cada eje debe hacerse de modo que:

- Los puntos experimentales no queden todos juntos, debiendo cubrir toda la zona del papel.
- La escala debe ser sencilla. Lo más sencillo es representar por un milímetro una potencia de 10 de la unidad; la siguiente simplicidad es aquella en que un milímetro (ó un centímetro) representa 2 ó 5 unidades.
- El origen de la representación no tiene por qué ser el punto (0, 0). Salvo en casos especiales la escala y el origen se tomarán de manera que la curva a representar quede centrada en el papel y ocupe la mayor parte de éste.
- Cada punto se representa por un punto (.), un asterisco (*), u otro símbolo parecido. Si existen varias curvas en la misma gráfica con diferentes significados, los puntos de cada una se representan con distintos símbolos y/o en distintos colores.

e) Representación gráfica del error de las medidas
Si se representan los errores se deben reflejar como una cruz o un rectángulo, centrados en el punto y de dimensiones horizontales y verticales el doble del valor del error absoluto de las coordenadas horizontales y verticales del punto en cuestión.

f) Ajuste de líneas a los puntos representados
En el caso de que realice un ajuste por mínimos cuadrados de sus datos deberá pintar la línea (o curva) obtenida con ese método sobre la gráfica. La línea (o curva) ha de ser una línea fina y continua, nunca quebrada, que debería pasar por todos los rectángulos de error, y que en muchos casos no pasa por los puntos experimentales (incluso puede que no pase por ninguno). Si al hacer esta operación alguno de los rectángulos de error queda excesivamente alejado de la forma continúa de la gráfica, puede que se trate de un error, y que sea conveniente repetir la medida correspondiente a dicho punto.

8. Análisis de regresión lineal. Método de los mínimos cuadrados.

Es frecuente en muchos experimentos y en muchas ramas de la ciencia encontrar relaciones lineales entre dos variables. El objeto de un análisis de regresión es investigar la relación estadística que existe entre una variable dependiente (y) y una variables independiente (x). Para poder realizar esta investigación, se debe postular una relación funcional entre las variables. Debido a su simplicidad analítica, la forma funcional que más se utiliza en la práctica es la relación lineal. Cuando solo existe una variable independiente, esto se reduce a la ecuación de una recta:

$$y = ax + b \tag{10}$$

donde a es la pendiente de la recta y b es la ordenada en el origen.

Por ejemplo la relación entre el espacio recorrido (por un cuerpo en movimiento rectilíneo con velocidad constante) y el tiempo es una relación lineal: $e = e_0 + vt$ donde la pendiente de la recta es la velocidad del cuerpo v y donde la ordenada en el origen es el espacio inicial e_0. En otros casos en las que las relaciones no son aparentemente lineales éstas se pueden reformular (modificando las variables que se escogen como independiente y dependiente de forma adecuada) hasta conseguir que la relación sea lineal. Es el caso, por ejemplo, del movimiento uniforme acelerado donde la relación entre la velocidad del móvil y el tiempo es una relación cuadrática: $\mathrm{v} = \frac{1}{2}gt^2 + \mathrm{v}_0$. Si como variable independiente tomáramos el tiempo al cuadrado t2 entonces la relación entre la velocidad del móvil y el tiempo al cuadrado es una relación lineal: con la pendiente de la recta dada por y siendo la velocidad inicial v0 la ordenada en el origen de la recta, tal y como se representa en el siguiente esquema que resume la identificación de cada uno de los términos.

Relación lineal entre las variables v y t²
$v = \frac{1}{2}g \; t^2 + v_0$
$y = a \cdot x + b$

Imaginemos que sospechamos que la relación entre dos variables (x e y medidas experimentalmente en el laboratorio) es una relación lineal y que además queremos hallar cuantitativamente dicha relación. Para cerciorarnos de dicha relación lineal podríamos previamente representar en una gráfica la nube de puntos experimentales y “ver” si realmente están situados sobre una recta. ¿Cuál sería la recta que mejor ajusta dichos puntos experimentales? Para buscar la mejor recta (también llamada recta de regresión lineal) que ajuste nuestros datos tenemos que encontrar los valores de a (pendiente) y b (ordenada en el origen). Nuestro problema consiste en obtener estimaciones de estos coeficientes a partir de los valores de las variables x e y. En el análisis de regresión lineal, estas estimaciones se obtienen por medio del método de mínimos cuadrados.

Intentemos aplicar de forma matemática las ideas expuestas en el párrafo anterior: el método llamado de mínimos cuadrados. Esta técnica trata de buscar la recta que mejor ajuste a una nube de puntos, imponiendo la condición de que la suma de los cuadrados de las distancias entre los valores de la variable dependiente y de los correspondientes a los predichos por la ecuación lineal sea mínima:

$$d = \sum_i \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2 \qquad (11)$$

Para que sea un mínimo debe ocurrir que: $\partial d / \partial a = 0$; $\partial d / \partial b = 0$. Se deja para el esforzado alumno la demostración de las siguientes expresiones para el valor de la pendiente (*a*) y de la ordenada en el origen (*b*) de dicha recta:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2}; \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (12)$$

siendo ***n*** el número de medidas, ***a*** la pendiente de la recta a determinar y ***b*** su ordenada en el origen.

Los errores correspondientes al cálculo del error de la pendiente y de la ordenada en el origen son, respectivamente:

$$\Delta a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}}; \qquad \Delta b = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2}{n(n-2)}} \qquad (13)$$

El método descrito en los párrafos anteriores parte de la idea de optimizar el ajuste respecto de la variable dependiente. Así, obtenemos lo que se llama la **recta de regresión** de *y* sobre *x*. Si hiciéramos lo propio

con la variable independiente, obtendríamos otra recta de regresión (de *x* sobre y) con otra pendiente distinta. A partir de estas pendientes podemos determinar el grado de dependencia lineal que existe entre ambas variables. Esto es lo que se llama correlación lineal entre las variables *x* e y. El parámetro que da cuenta de esta correlación, es el llamado **coeficiente de correlación lineal** *r*. Éste se calcula obteniendo la media geométrica de las pendientes de las dos rectas de regresión antes descritas. La expresión matemática útil para este parámetro es:

$$r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{\sqrt{\left[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right]}} \qquad (14)$$

El coeficiente de correlación lineal, puede demostrarse que es un número comprendido entre -1 y +1. Cuanto más cerca esté |r| de la unidad, interpretaremos que más fuertemente lineal es la correlación entre las variables. Por ello es importante calcular, previamente al ajuste de mínimos cuadrados, el valor del coeficiente de correlación y comprobar que su módulo es cercano a la unidad, y de esta manera asegurar que la curva que mejor se ajusta a la nube de puntos es una recta. Para valores de |r| inferiores a 0,85, debe buscarse otro tipo de dependencia funcional entre las variables. Si el coeficiente de correlación lineal es mayor o igual que 0,9 y menor que 1, siempre se debe expresar con todas sus cifras hasta la primera que no sea 9, redondeándola en su caso (por ejemplo, si resulta ser 0,9996714, habría que expresarlo como 0,9997). Por debajo de 0,9, se puede expresar con 2 cifras significativas.

Para realizar los cálculos correspondientes al ajuste por mínimos cuadrados, es conveniente utilizar calculadoras científicas donde aparezcan estos parámetros de forma explícita o bien utilizar programas de ordenador que los calculan de forma rápida y sencilla.

9. Sugerencias para la realización de guiones.

Pretendemos proporcionar aquí unas líneas generales para elaborar los guiones que deben entregarse posteriormente a la realización de las prácticas, sin que coarte la libertad individual, pero sí estableciendo unas directrices comunes.

Podemos destacar tres grandes bloques en la realización de los guiones:

a) **Objetivos y Fundamentos Teóricos:** Debe quedar muy claro cuáles son los objetivos de la práctica. También deben incluirse unos fundamentos teóricos mínimos necesarios que nos permitan entender **qué se hace** y **cómo se hace** (*No tiene sentido copiar los guiones; el alumno debe entender y explicarlo con sus propias palabras).*

b) **Realización de la Práctica:** Comenzaremos haciendo una exposición de las medidas experimentales realizadas, justificando cuántas hemos tomado, el error asociado a ellas, etc., y por qué. Es deseable el uso de tablas sencillas y claras.

La práctica debe entregarse perfectamente presentada y con todos los cálculos, incluidos los de errores, especificados. Si hay que presentar alguna gráfica hágalo siguiendo las recomendaciones para construirlas (apartado 9 de este cuaderno). En el caso de que sea necesario realizar un ajuste por mínimos cuadrados incluya los datos proporcionados por el programa que realiza los cálculos y saque las conclusiones oportunas.

A continuación procederemos al tratamiento de dichas medidas y a la obtención de los resultados, teniendo en cuenta para ello el cálculo de errores en medidas directas e indirectas. Ha de primar en todo momento el sentido común y la lógica, y no la *consecución exclusiva de un excelente resultado*.

No olvide que todos los resultados tanto finales como intermedios poseen unidades y tienen errores asociados.

Finalmente el resultado final debe comentarse (comparación con el valor verdadero –si se conoce-, causas de error, posibles mejoras de la prácticas, etc.) con el espíritu crítico que debe poseer cualquier estudiante de una carrera de ciencias.

c) Cuestiones: Con ellas se busca la ampliación de conocimientos teóricos, así como las posibles mejoras que pueda sugerir el alumno tras la realización de la práctica.

10. Unidades básicas, múltiplos y submúltiplos decimales

(A) Unidades básicas en física

Magnitud	Nombre	Símbolo	Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	metro	m	Temperatura termodinámica	kelvin	K
Masa	kilogramo	kg	Cantidad de sustancia	mol	mol
Tiempo	segundo	s	Intensidad luminosa	candela	cd
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A			

(B) Unidades derivadas sin dimensión.

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresión en unidades SI básicas
Ángulo plano	Radián	rad	$m^1\ m^{-1} = 1$
Ángulo sólido*	Estereorradián	sr	$m^2\ m^{-2} = 1$

(C) Múltiplos y submúltiplos decimales

Factor	Prefijo	Símbolo	Factor	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T	10^{-1}	deci	d
10^{9}	giga	G	10^{-2}	centi	c
10^{6}	mega	M	10^{-3}	mili	m
10^{3}	kilo	k	10^{-6}	micro	µ
10^{2}	hecto	h	10^{-9}	nano	n
10^{1}	deca	da	10^{-12}	pico	p

(D) Algunos datos fotométricos relevantes

Escenas naturales *(Middleton,1952)*

	Luminancia (cd/m^2)		Luminancia (cd/m^2)
Cielo despejado al amanecer	10^4	Cielo despejado, 30min después de atardecer	10^{-1}
Cielo nuboso al amanecer	10^3	Cielo nocturno, con luna llena	10^{-2}
Cielo gris al amanecer	10^2	Cielo nocturno, despejado sin luna llena	10^{-3}
Cielo nuboso al atardecer	10	Cielo nocturno, nuboso sin luna llena	10^{-4}
Cielo despejado, 15min después de atardecer	1		

Umbrales relevantes en visión *(Hood and Finkelstein, 1986)*

	Nivel de luminancia (log cd/m^2)	Nivel de iluminancia (log trolands)
Umbral absoluto	-6	-4.4
Nivel escotópico		
Umbral para conos	-3	-2
Nivel mesópico		
Saturación en bastones	2	2.6
Nivel fotópico		
Umbral dañino	8	8.5

Conversión de cd/m^2 a ...

- **foot-lamberts** : cd/m^2 *0..29188558
- **trolands fotópicos** : cd/m^2 * pi * (radio de la pupila en mm)^2
- **fotones absorbidos por receptor por segundo**: cd/m^2 * 10 * pi * (radio de la pupila en mm)^2
- **Nit** : cd/m^2 * 1 = 1 cd/m^2
- **Stilb** : cd/m^2 * 10^{-4} = 1 cd/cm^2
- **Apostilb** : cd/m^2 * 3,142
- **Lambert** : cd/m^2 * 3,142 x 10^{-4}
- **Millilambert** : cd/m^2 * 0,314